Analiza - klasa 1a Zestaw 3. 27.9.2023

Zbiory i kwantyfikatory

Suma zbiorów: $A \cup B$; **przecięcie** (część wspólna, iloczyn) zbiorów: $A \cap B$, **różnica** zbiorów: $A \setminus B$.

Zbiór pusty oznaczamy $\emptyset$.

Zapis $x \in A$ odczytujemy jako x *jest elementem (należy do) zbioru* A, $x \notin A$ jako x *nie jest elementem (nie należy do) zbioru* A.

Jeśli A i B to zbiory, to zapis $A \subset B$ oznacza, że A *jest podzbiorem* B

Dopełnienie zbioru. Jeżeli $A \subset \Omega$, to zbiór $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A (w zbiorze Ω). Na przykład, dopełnieniem zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych jest zbiór liczb niewymiernych.

Zachodzi równoważność $A \subset B \iff B' \subset A'$.

Różnica symetryczna zbiorów: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

---

1. Zapisz różnicę symetryczną $A \triangle B$ dwóch zbiorów $A, B \subset \Omega$ za pomocą operacji dopełnienia, sumy i przecięcia zbiorów.

2. Udowodnij *prawa de Morgana* dla podzbiorów $A, B, C \subset \Omega$:
(a) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$, (b) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$.

3. Niech $A, B \subset \Omega$. Zaznacz na diagramie Venna zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie
(a) $x \in A \iff x \in B$, (b) $x \in A \Rightarrow x \in B$, (c) $x \in A \Rightarrow x \in B' \cap A$.

4. A, B, C oznaczają zbiory. Udowodnij następujące związki:

(a) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
(b) $A \cap B = \emptyset \iff A \cup B = A \triangle B$,
(c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
(d) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$,
(e) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$,
(f) $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

5. A, B, C, D, E to zbiory. Wykaż, że $A \triangle E \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \cup (C \triangle D) \cup (D \triangle E)$.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych,
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych.

Kwantyfikator ogólny. Zdania postaci *Dla każdego x ze zbioru X zachodzi p(x)*, zapisujemy następująco: $\forall_{x \in X}\ p(x)$. Np. zdanie *Dla każdej liczby nauturalnej x prawdziwa jest nierówność* $x > \frac{1}{2}$ można zapisać jako $\forall_{x \in \mathbb{N}}\ x > \dfrac{1}{2}$.

Symbol $\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym.*

Kwantyfikator szczegółowy. Zdania postaci *Istnieje x należące do zbioru X, dla którego zachodzi p(x)*, np. zdanie *Istnieje liczba naturalna x taka, że* $x > 2023$, można zapisać jako $\exists_{x \in \mathbb{N}}\ x > 2022$.

Symbol $\exists$ nazywamy *kwantyfikatorem szczegółowym.*

Jeżeli dwa kwantyfikatory ogólne lub dwa kwantyfikatory szczegółowe występują jeden po drugim, można zmienić ich kolejność, np.

$$\Big(\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}}\ x > 1 \Rightarrow x^n > 1\Big) \iff \Big(\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}}\ x > 1 \Rightarrow x^n > 1\Big)$$
$$\Big(\exists_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\ x^2 = n + 1 \wedge x > n\Big) \iff \Big(\exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x \in \mathbb{R}}\ x^2 = n + 1 \wedge x > n\Big).$$

Nie można zmienić kolejności kwantyfikatora ogólngo i szczególnego. Poniższe dwa zdania **nie są** równoważne:
(i) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\ x < n$, (ii) $\exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}}\ x < n$.

Zawsze zachodzi implikacja $\Big(\exists_{x \in X} \forall_{y \in Y}\ p(x, y)\Big) \Rightarrow \Big(\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X}\ p(x, y)\Big)$.

Na przykład: $\Big(\exists_{x \in \mathbb{N}} \forall_{y > 1}\ y^2 > x\Big) \Rightarrow \Big(\forall_{y > 1} \exists_{x \in \mathbb{N}}\ y^2 > x\Big)$.

Prawa de Morgana: Jeżeli Ω jest zbiorem, a $p(x)$ to zdanie logiczne, którego wartość zależy od elementu $x \in \Omega$, to

(i) $\sim\Big(\forall_{x \in \Omega}\ p(x)\Big) \iff \exists_{x \in \Omega} \sim p(x)$, (ii) $\sim\Big(\exists_{x \in \Omega}\ p(x)\Big) \iff \forall_{x \in \Omega} \sim p(x)$.

---

6. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań z kwantyfikatorami.

(a) $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ 2 \mid n^2 + n^5$
(b) $\exists_{n \in \mathbb{N}}\ n^n = 16\,777\,216$
(c) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}}\ x \neq 0 \Rightarrow x^2 > n$
(d) $\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{Z}}\ x > 0 \wedge x < n^2 - n + \frac{1}{20}$
(e) $\exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x > 0} \exists_{k \in \mathbb{N}}\ \sqrt[k]{x} < n$
(f) $\forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{x > 0} \forall_{n \in \mathbb{Z}_+}\ (n + \frac{1}{100})^k \geqslant xn$
(g) $\exists_{q \in \mathbb{Q}} \forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{k \in \mathbb{Z}}\ q = xk \Rightarrow q = x \vee q = n$

Czy potrafisz rozstrzygnąć czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie?

7. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów i działań logicznych definicję *liczby pierwszej.*

8. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są podzbiorami zbioru Ω. Stosując rachunek zdań i kwantyfikatory udowodnij *prawa de Morgana* dla zbiorów:

(i) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'$
(ii) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_n'$